Über ein Problem für Kreisscheibenfamilien

Von LAJOS STACHÓ in Szeged

Herrn Prof. L. Kalmár zum 60. Geburtstag gewidmet

§ 1. Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem folgenden geometrischen Problem: Ist ein System von abgeschlossenen Kreisscheiben in der Ebene derart gegeben, daß die Scheiben sich paarweise treffen, so gibt es im allgemeinen keinen Punkt der Ebene, der jeder Kreisscheibe angehört; nach einer Vermutung von T. GALLAI kann man jedoch immer 5 oder weniger Punkte in der Ebene so auswählen, daß jede der gegebenen Kreisscheiben mindestens einen dieser Punkte enthält, oder, anschaulich gesagt, daß diese Punkte die Kreisscheibenfamilie „erfassen". Diese Vermutung hat L. FEJES TÓTH in sein Buch [1]) aufgenommen. Dort findet man die Bemerkung, daß nach G. SZEKERES und P. UNGÁR 7 Punkte immer ausreichen. Aus mündlicher Mitteilung erfuhr ich später, daß A. HEPPES von 7 zu 6 herabsteigen konnte. [2])

Andererseits hat B. GRÜNBAUM [3]) ein System von 21 und später L. DANZER ein System von 10 Kreisen gefunden, das mit 3 Punkten nicht erfaßbar ist. (Es ist nicht schwer zu zeigen, daß je 5 Kreise durch 2, folglich je 8 durch 3 Punkte erfaßbar sind; DANZERS Konstruktion ist also ziemlich gut.)

In dieser Arbeit untersuchen wir die regelmäßigen erfassenden Punktsysteme und beweisen die Vermutung von GALLAI in der folgenden verschärften Form: Haben die Halbmesser der Kreisscheiben eine positive untere Schranke, so gibt es einen Kreis K_0 derart, daß die Eckpunkte eines in K_0 eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ($n \geqq 4$) und sein Mittelpunkt ein „inneres erfassendes Punktsystem" der gegebenen Kreisscheibenfamilie bilden, d. h. jede Kreisscheibe in ihrem Inneren wenigstens einen dieser Punkte enthält.

Damit wird die Existenz eines aus höchstens 5 Punkten bestehenden inneren erfassenden Punktsystems bewiesen. Das Problem, ob diese Anzahl sich noch verkleinern läßt, wird in dieser Arbeit offen gelassen.

---

[1]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953), S. 97.

[2]) L. DANZER bemerkt in einer Fußnote seiner Arbeit „Über Durchschnitteigenschaften n-dimensionaler Kugelfamilien", *J. reine angew. Math.*, **208** (1961), 181—203, daß er sogar zu 4 erfaßenden Punkten herabsteigen kann.

[3]) B. GRÜNBAUM, On intersection of similar sets, *Portugaliae Math.*, **18** (1958), 155—164.

§ 2. Definitionen und Hilfssätze

I. Unter *Kreisscheiben* verstehen wir gewöhnliche abgeschlossene Kreisscheiben, einzige Punkte, und abgeschlossene Halbebenen.

II. Unter einer *Familie* $\mathfrak{F}$ *von Kreisscheiben* in der euklidischen Ebene E verstehen wir ein aus endlich vielen Kreisscheiben $k_1, k_2, \dots, k_n$ bestehendes System, welches mindestens ein beschränktes Element k° enthält, und deren je zwei Elemente einen nichtleeren Durchschnitt $k_i \cap k_j$ haben.

III. Haben drei Elemente k_1, k_2, k_3 einer Familie $\mathfrak{F}$ von Kreisscheiben keinen gemeinsamen Punkt, so bilden sie ein *Bogendreieck*. Dieses ist das durch die drei Kreisscheiben umfaßte Gebiet, genauer die Abschliessung der Menge $\{\mathfrak{K}[\bigcup_{i\neq j}(k_i \cap k_j)] - \bigcup_i k_i\}$, wobei $\mathfrak{K}M$ die konvexe Hülle der Menge M bedeutet.

IV. Unter einem *erfassenden* (bzw. *inneren erfassenden*) *Punktsystem* einer Familie $\mathfrak{F}$ von Kreisscheiben verstehen wir ein System von Punkten, welches die Eigenschaft hat, daß jede Kreisscheibe der Familie mindestens einen Punkt des Systems enthält (bzw. in ihrem Inneren enthält).

V. Die Minimalanzahl der Punkte der erfassenden (bzw. inneren erfassenden) Punktsysteme wird *Stichzahl* s_0 (bzw. *innere Stichzahl* s_0') der Familie genannt.

Nun werden wir für Kreisscheibenfamilien $\mathfrak{F}$, die mindestens ein Bogendreieck enthalten, einige Hilfssätze beweisen und einige weitere Definitionen einführen.

Hilfssatz 1. *Es seien k_1, k_2, k_3 Elemente einer Familie von Kreisscheiben die ein Bogendreieck Δ bilden. Wenn ein weiteres Element k' dieser Familie das Bogendreieck Δ nicht enthält, lassen sich zwei von den Elementen k_1, k_2, k_3 derart auswählen, daß sie mit k' zusammen wieder ein Bogendreieck Δ' bilden.*

Beweis. Im Gegensatz zu unserer Behauptung setzen wir voraus, daß jede der Durchschnitte $k_1 \cap k_2$, $k_2 \cap k_3$ und $k_3 \cap k_1$ trifft. Es ist leicht einzusehen, daß die konvexe Hülle von Δ mit der konvexen Hülle der Ecken von Δ übereinstimmt, andererseits enthält die konvexe Hülle von drei Punkten, die der Reihe nach in $k_1 \cap k_2$, $k_2 \cap k_3$ und $k_3 \cap k_1$ liegen, alle Ecken des Bogendreiecks. Aus der Konvexität von k' folgt, daß sie — im Widerspruch zu unserer Voraussetzung — das Bogendreieck Δ enthält. Damit ist der Beweis fertig.

Der *Inkreis* eines Bogendreiecks hat offenbar eine Minimal- und eine Maximaleigenschaft. Er ist nämlich der *kleinste* unter den Kreisen, die alle „Seitenkreise" des Bogendreiecks treffen. Andererseits ist er der *größte* unter den im Bogendreieck liegenden Kreisen.

Auf den Inkreis eines Bogendreiecks bezieht sich der

Hilfssatz 2. *Es seien k_1, k_2 und k_3 drei Elemente einer Familie von Kreisscheiben $\mathfrak{F}$, die ein Bogendreieck Δ mit dem Inkreishalbmesser ϱ bilden. Ist k' eine Kreisscheibe der Familie, die den Inkreis k_0 von Δ nicht trifft, so kann man zwei unter den Kreisscheiben k_1, k_2 und k_3 derart auswählen, daß sie mit k' ein neues Bogendreieck Δ' bilden, welches einen Inkreishalbmesser $\varrho' > \varrho$ hat.*

Beweis. Sei B_i der Berührungspunkt von k_0 und k_i, und B_i' der zu B_i $(i = 1, 2, 3)$ diametral liegende Punkt am Rande von k_0. Ist d der Abstand von k_0 zu k', und ist r' der Halbmesser von k', so berührt der mit k' konzentrische Kreis vom Halbmesser $d+r'$ den Kreis k_0 in einem Punkt B^*.

Liegt B^* im Inneren des Kreisbogens $\widehat{B_2'B_3'}$, so werden wir zeigen, daß k', k_2 und k_3 ein Bogendreieck bilden, das den Kreis k_0 enthält, woraus unsere Behauptung schon folgt. Wir betrachten die Halbebenen h_2, h_3, h^*, die k_0 in den Punkten B_2, B_3, B^* vom Außen berühren. Da die Bögen $\widehat{B_2B_3}, \widehat{B_3B^*}$ und $\widehat{B^*B_2}$ kleiner als $\varrho\pi$ sind, bilden die Randgeraden der Halbebenen ein gewöhnliches Dreieck. Da $B^* \in \widehat{B_2'B_3'}$ ist, hat die k' enthaltende Halbebene h^* mit dem Durchschnitt von h_2 und h_3, der den gemeinsamen Teil von k_2 und k_3 enthält, keinen gemeinsamen Punkt. Die genannten Kreisscheiben bilden also ein Bogendreieck, w. z. b. w.

VI. Wir nennen eine Kieisscheibe k zur Familie $\mathfrak{F}$ *adjungierbar*, wenn sie jede Kreisscheibe der Familie $\mathfrak{F}$ trifft, ungeachtet, ob sie zu $\mathfrak{F}$ gehört oder nicht.

Insbesondere ist also jedes Element von $\mathfrak{F}$ zu $\mathfrak{F}$ adjungierbar.

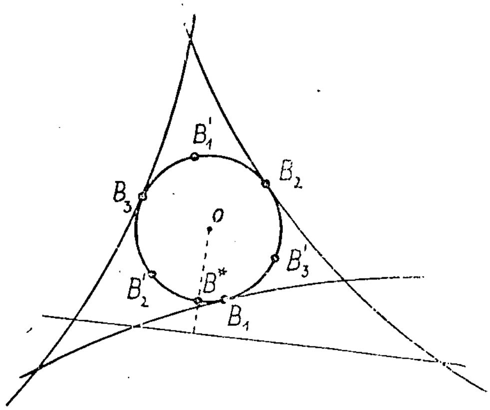

Abb. 1

Hilfssatz 3. *Unter allen Kreisscheiben, die sich zur Familie $\mathfrak{F}$ adjungieren lassen, gibt es eine Kreisscheibe k_0^* von minimalem Halbmesser $\varrho_0^* < \infty$.*

Beweis. Wir betrachten alle Bogendreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, die von den Elementen von $\mathfrak{F}$ gebildet sind. Wir wählen von diesen ein Bogendreieck Δ^* aus, dessen Inkreis k_0^* den größten Halbmesser hat. Wir bezeichnen mit k_1^*, k_2^*, k_3^* die Kreisscheiben, die das Bogendreieck Δ^* bilden. Wir behaupten, daß k_0^* jede Kreisscheibe der Familie $\mathfrak{F}$ trifft. Im entgegengesetzten Fall können wir nämlich nach dem Hilfssatz 2 aus den Elementen k_1^*, k_2^*, k_3^* zwei so auswählen, daß sie mit k zusammen ein Bogendreieck Δ' bilden, dessen Inkreis größer ist, als der von Δ^*. Das widerspricht aber der Definition von Δ^*, da Δ' selbst ein Bogendreieck von $\mathfrak{F}$ ist.

Aus der Minimaleigenschaft des Inkreises folgt, daß k_0^* einen nicht größeren Halbmesser hat als k°, da ja auch k° alle „Seitenkreise" von Δ^* trifft. Folglich ist $\varrho^* < \infty$.

Aus der Minimaleigenschaft des Inkreises folgt weiter, daß k_0^* die kleinste unter allen Kreisscheiben der Ebene ist, die sich zur Familie $\mathfrak{F}$ adjungieren lassen. Denn diese müßen jedes Element von $\mathfrak{F}$, insbesondere auch k_1^*, k_2^*, k_3^* treffen, und unter allen Kreisscheiben, die die Kreisscheiben k_1^*, k_2^*, k_3^* treffen, ist k_0^* von minimalen Halbmesser. Daraus folgt weiter, daß k_0^* eindeutig bestimmt ist.

Es folgt auch, daß alle Halbmesser der Elemente von $\mathfrak{F}$ den Halbmesser von k_0^* übertreffen.

Hilfssatz 3 wurde damit bewiesen. Darüber hinaus haben wir folgendes bewiesen:

Hilfssatz 4. *Es gibt mindestens ein Bogendreieck Δ^*, das von gewissen Kreisscheiben $k_1^*, k_2^*, k_3^* \in \mathfrak{F}$ gebildet ist, dessen Inkreis die Kreisscheibe k_0^* ist.*

Wir adjungieren nun k_0^* zu $\mathfrak{F}$ und bezeichnen die so erhaltene Kreisscheibenfamilie mit $\bar{\mathfrak{F}}$. Auf Grund der Hilfssätze 3 und 4 führen wir für Kreisscheibenfamilien, die wenigstens ein Bogendreieck enthalten, die folgenden Definitionen ein:

VII. *Einheitskreis* einer Kreisscheibenfamilie $\bar{\mathfrak{F}}$ wird der Kreis k_0^* von minimalen Halbmesser ($r_0^* > 0$) genannt, der zu $\bar{\mathfrak{F}}$ gehört; also setzt man $r_0^* = 1$.

VIII. *Grundscheiben* der Familie $\bar{\mathfrak{F}}$ nennen wir drei Kreisscheiben $k_1^*, k_2^*, k_3^* \in \bar{\mathfrak{F}}$, die ein Bogendreieck bilden, welches den Einheitskreis k_0^* von $\bar{\mathfrak{F}}$ für Inkreis hat.

IX. Die Tangenten des Einheitskreises in den gemeinsamen Punkten mit den Grundscheiben bilden ein Dreieck: das ist das *Grunddreieck* von $\bar{\mathfrak{F}}$.

Um die Folgenden formulieren zu können, führt man einige Bezeichnungen ein. Die „größte" Seite (oder eine der größten Seiten) des Grunddreiecks sei mit a und der zugehörige Grundkreis mit k_1^* bezeichnet. *Man nimmt das rechtwinklige Koordinatensystem so an, daß der Punkt* $(0, 0)$ *der Mittelpunkt der Einheitsscheibe* k_0^* *von* $\bar{\mathfrak{F}}$ *und der Punkt* $(0, -1)$ *der Berührungspunkt von* k_0^* *und* k_1^* *ist.*

Da an der größten Seite des Grunddreiecks spitze Winkeln liegen, liegen die Berührungspunkte der Grundkreise mit dem Einheitskreis am Bogenviertel zwischen den Punkten $(1, 0)$ und $(0, 1)$ bzw. $(0, 1)$ und $(-1, 0)$. Wir bezeichnen diese Grundkreise, der Reihe nach, mit k_2^* und k_3^*.

Wir werden später $P_0 = (0, 0)$ für einen der erfassenden Punkte wählen, deshalb werden wir die Kreisscheiben, die den Punkt P_0 als inneren Punkt enthalten, außer Acht lassen. Die weiteren Kreisscheiben von $\bar{\mathfrak{F}}$ werden in vier Klassen $\mathfrak{K}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ eingeteilt, und zwar gehöre zu $\mathfrak{K}_i$ jede Kreisscheibe, deren zu P_0 nächster Punkt im i-ten Koordinatenviertel liegt. Die eventuellen Zweideutigkeiten der Klasseneinteilung werden wir dadurch auflösen, daß wir diese Scheibe in beide möglichen Klassen einteilen.

Es gibt kein Koordinatenviertel, das mit jedem Grundkreis gemeinsame Punkte hat; das erste und das zweite Koordinatenviertel enthalten keinen Punkt aus k_1^*, das dritte keinen Punkt aus k_2^* und das vierte keinen Punkt aus k_3^*.

X. Wir betrachten die inneren Punkte des Parallelbereiches vom Radius 1 der Koordinatenviertel. Wir bezeichnen die Komplemente dieser Punktmengen der Reihe nach mit T_1, T_2, T_3, T_4, und ihre Begrenzungskurven mit g_1, g_2, g_3, g_4.

Dann ist $k_1^* \subseteq T_1 \cap T_2$, $k_2^* \subset T_3$, $k_3^* \subset T_4$.

Wir betrachten die Elemente der Klasse $\mathfrak{K}_i$. Sie treffen jeden Grundkreis, insbesondere auch k_1^*. Da dieser Grundkreis ganz im Bereiche T_1 liegt, hat jedes Element von $\mathfrak{K}_1$ auch mit g_1 mindestens einen gemeinsamen Punkt. Ähnlicherweise wird g_i von jedem Element der Klasse $\mathfrak{K}_i$ getroffen. Eine beliebige Kreisscheibe $k(x_k, y_k; r_k)$ der Klasse $\mathfrak{K}_1$ hat also die folgenden Eigenschaften: ihr Mittelpunkt (x_k, y_k) liegt im ersten Koordinatenviertel ($x_k \geqq 0$; $y_k \geqq 0$), ihr Halbmesser r_k ist größer als 1 [4]), sie trifft die Einheitsscheibe und die Kurve g_1.

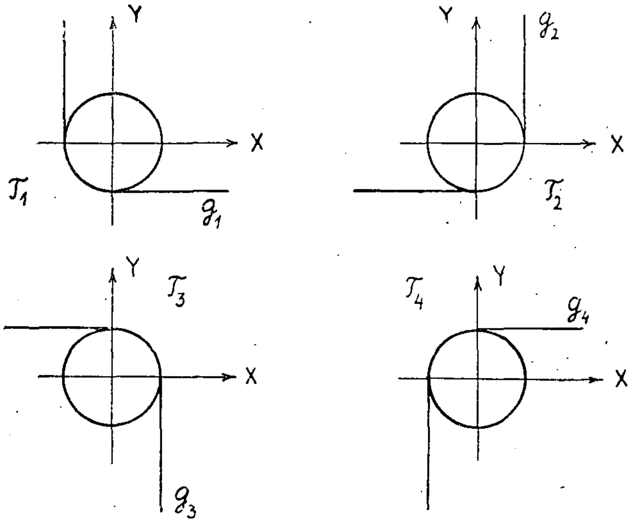

Abb. 2

Das System aller Kreise, die diese Eigenschaften besitzen, sei mit $\mathfrak{F}_1$ bezeichnet. $\mathfrak{F}_1$ ist eine Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$. Ähnlicherweise können wir die Klassen $\mathfrak{K}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) zu Systemen $\mathfrak{F}_i$ erweitern.

XI. Unter dem *Erweiterungsystem* von $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ verstehen wir das System aller Kreisscheiben k in der Ebene, die die folgenden Eigenschaften besitzen:
1. k trifft die Einheitskreisscheibe k_0^* der Familie $\overline{\mathfrak{F}}$;
2. P_0 ist in k nicht enthalten;
3. liegt der zu P_0 am nächsten liegende Punkt von k im i-ten Koordinatenviertel, so trifft k die Begrenzungskurve g_i ($i = 1, 2, 3, 4$);
4. der Halbmesser von k ist größer als 1.

§ 3. Erfassende Punktsysteme

Wir beweisen nun den unser Hauptergebnis enthaltenden

Satz 1. *Ist c eine positive untere Schranke für die Halbmesser der Elemente einer Kreisscheibenfamilie $\mathfrak{F}$, so gibt es einen Kreis K_0 in der Ebene, in den man (zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 4$) ein regelmäßiges n-Eck V_n so einschreiben kann, daß*

[4]) Diese Bedingung folgt daraus, daß die Kreisscheiben von $\mathfrak{K}_i$ alle Grundscheiben von $\mathfrak{F}$ treffen müßen.

jedes Element von $\mathfrak{F}$, wenn nicht den Mittelpunkt, so mindestens einen der Eckpunkte von V_n als inneren Punkt enthält. Für $n=4$, 5 ist dieses regelmäßige n-Eck auf spezielle Weise zu wählen. Für $n \geqq 6$ kann es beliebig gewählt werden.

Daraus folgt dann der

Satz 2. *Ist der Halbmesser jedes Elementes einer Kreisscheibenfamilie $\mathfrak{F}$ größer als $c(>0)$, so ist die innere Stichzahl s_0' von $\mathfrak{F}$ höchstens gleich 5. Wegen $s_0' \geqq s_0$ folgt hieraus für die Stichzahl s_0 jeder Kreisscheibenfamilie:*

$$s_0 \leqq 5.$$

Beweis. Es genügt den Satz 1 zu beweisen. Wir unterscheiden zwei Fälle je nachdem, ob es in der Familie $\mathfrak{F}$ kein oder mindestens ein Bogendreieck gibt.

Fall I: Es gibt kein Bogendreieck in der Familie. Dann haben die Elemente von $\mathfrak{F}$ laut dem Satz von HELLY[5]) einen gemeinsamen Punkt P_0. Demzufolge kommt man (falls die Halbmesser von $\mathfrak{F}$ eine positive untere Schranke c haben) sogar mit vier Punkten aus, die ein inneres erfassendes System bilden. Man nehme ein gleichseitiges Dreieck mit Schwerpunkt P_0 und mit Umkreisradius kleiner als c. Dann bilden P_0 und die Eckpunkte des Dreiecks ein inneres erfassendes Punktsystem von $\mathfrak{F}$. In diesem Falle ist also $s_0=1$, $s_0' \leqq 4$.

Fall II: Es gibt ein Bogendreieck in der Familie $\mathfrak{F}$. Zuerst ergänzen wir die Familie $\mathfrak{F}$ auf Grund des Hilfssatzes 3 und 4 zu einem System $\overline{\mathfrak{F}}$. Dann kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r_0^*=1$ gesetzt werden.

a) *Erfaßbarkeit mit 5 Punkten.*

Wir verwenden nun die Bezeichnungen des § 2 und betrachten laut Definition XI das Erweiterungssystem $\mathfrak{E}$ von $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$. Wir behaupten: *Die Punkte*

$$P_0=(0,0),\quad P_1=(\sqrt{3},0),\quad P_2=(0,\sqrt{3}),\quad P_3=(-\sqrt{3},0),\quad P_4=(0,-\sqrt{3})$$

liefern ein inneres erfassendes Punktsystem von $\mathfrak{E}$.

Das Quadrat P_1, P_2, P_3, P_4 enthält die Einheitsscheibe k_0^* in seinem Inneren, folglich liegt mindestens eine Ecke des Quadrates im Inneren jeder zu $\mathfrak{E}$ gehörenden Halbebene.

Wir behaupten, daß jedes Element aus $\mathfrak{E}_i$ von endlichem Halbmesser mindestens einen der Punkte P_0, P_i und P_{i+1} in seinem Inneren enthält ($P_5=P_1$). Aus Symmetriegründen genügt es die Behauptung für die Elemente von $\mathfrak{E}_1$ zu beweisen.

Wegen der Symmetrie bezüglich der Geraden $y=x$, genügt es nur jene Kreisscheiben von $\mathfrak{E}_1$ zu betrachten, deren Mittelpunkte in der unteren Hälfte des ersten Koordinatenviertels liegen. Es sei k eine solche Kreisscheibe. Nach der Bedingung 3 in Definition XI trifft k die Begrenzungskurve g_1, es folgt also, daß die Gerade P_0P_1 die Kreisscheibe k in einer Strecke D_1D_2 ($D_1 \neq D_2$) schneidet, da sie sonst

[5]) E. HELLY, Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, **32** (1923), 175–176.

auch die zu ihrem Mittelpunkt nicht näher liegende Gerade P_0P_2 nicht überschreiten, folglich völlig im ersten Koordinatenviertel liegen würde. Wenn diese Strecke den Punkt P_1 in ihrem Inneren enthält, so ist das Innere der Kreisscheibe k erfaßt. Wir werden zeigen, daß das tatsächlich der Fall ist.

Wir bezeichnen mit k_m den k_0^* berührenden und durch die Punkte P_1 und P_2 gehenden Kreis, der, wie man leicht nachrechnen kann, keinen gemeinsamen Punkt mit g_1 hat. So gehört k_m nicht zur Menge $\mathfrak{E}_1$.

Gehört P_1 nicht zu k und ist $x_k \geqq \sqrt{3}$, so liegt D_1D_2 „rechts" von P_1. Da k die Kurve g_1 trifft, muß der Bogen $\widehat{D_1D_2}$ von k den Kreis k_m in zwei Punkten schneiden. Andererseits trifft aber k auch den Kreis k_0^*, enthält aber keinen der Punkte P_1, P_2. Folglich muß aber k den Kreis k_m auch innerhalb seines Bogens $\widehat{P_1P_2}$ treffen, was aber unmöglich ist.

Im anderen Fall, wenn also $x_k < \sqrt{3}$ ist und k den Punkt P_1 nicht enthält, kann k die Kurve g_1 nicht treffen, da die Höhe eines Kreissegments, dessen Radius mindestens 1 und dessen zugehörige Sehne höchstens 3 ist, immer kleiner als 1 ausfällt.

Somit haben wir den Satz 2 bewiesen. Es ist bemerkenswert, daß wir diesen Satz mittels der Erweiterungsmenge $\mathfrak{E}$ erhalten haben. Es sei noch bemerkt, daß man für den Umkreisradius des Quadrates $P_1, P_2, P_3 P_4$ einen beliebigen Wert b mit

$$2+2\sqrt{2}-\sqrt{5+4\sqrt{2}} = 1{,}5639\ldots < b < 2$$

wählen kann, wie man leicht nachrechnen kann. Die erwähnte untere Schranke ist durch jenen Kreis bestimmt, der sowohl k_0^*, wie auch die zu g_1 gehörenden Halbgeraden berührt.

b) *Erfaßbarkeit mit 6 Punkten.*

Wir behalten das zur Kreisscheibenfamilie passend eingeführte Koordinatensystem und die übrigen Bezeichnungen von § 2. Wir schlagen um den Mittelpunkt $P_0\,(0;0)$ einen Kreis K_0 vom Halbmesser $\sqrt{3}$. Es seien

$$P_j' = \left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{10}+j\frac{2\pi}{5}\right), \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{10}+j\frac{2\pi}{5}\right)\right) \qquad (j=1, 2, \ldots, 5)$$

die Eckpunkte eines in K_0 eingeschriebenen regulären Fünfecks V_5. Es wird gezeigt, daß $P_0, P_1', P_2', \ldots, P_5'$ ein inneres erfassendes Punktsystem ist.

Zum Beweis führen wir verschiedene spezielle Kreisscheiben ein. Es bedeute s_j den durch die Punkte P_j' und P_{j+1}' $(P_6'=P_1')$ laufenden und k_0^* berührenden Kreis vom Halbmesser

$$r = \frac{4-2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{5}}{2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{5}-2} \approx 1{,}49216\ldots,$$

ferner bezeichnen s_j' bzw. s_j'' die Kreise vom Radius 1, die durch P_j' und P_0 bzw. P_{j+1}' und P_0 gehen und deren Mittelpunkte im Winkelraum $P_j' P_0 P_{j+1}'$ $(j=1, 2, \ldots, 5)$ liegen.

Es ist leicht einzusehen, daß die Kreise s_j, s_j', s_j'' für $j=1, 2, 4, 5$ nicht zum Kreissystem $\overline{\mathfrak{F}}$ gehören können, weil sie mit der zugehörigen Bereichsgrenze g_i keinen gemeinsamen Punkt haben, wie man leicht nachrechnen kann. Auch die Kreisscheiben s_3, s_3', s_3'' gehören nicht zur Familie $\overline{\mathfrak{F}}$, da sie sonst jede Seite des

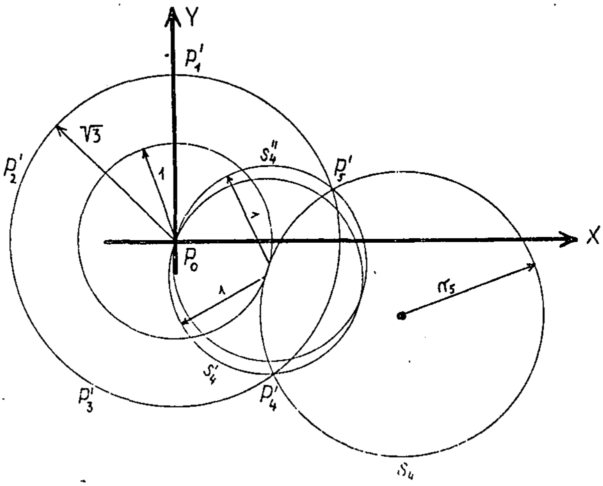

Abb. 3

Grunddreiecks treffen müßten. Das würde aber im Falle von s_3 bedeuten, daß der größte Winkel des Grunddreiecks höchstens dem Winkel der gemeinsamen äußeren Tangenten von k_0^* und s_3 gleich ist, also

$$2 \arcsin \frac{r-1}{r+1}$$

nicht übertrifft, und folglich kleiner als 23° ist, was aber offenbar unmöglich ist. Es folgt daraus, daß die in der konvexen Hülle von k_0^* und s_3 verlaufenden Kreise, also auch s_3' und s_3'', nicht zu $\overline{\mathfrak{F}}$ gehören können.

Wir werden zeigen, daß die Vereinigung

$$B_j := s_j \cup s_j' \cup s_j'' \qquad (j=1, 2, \dots, 5)$$

jede Kreisscheibe vom Halbmesser $\varrho > 1$ bedeckt, deren Mittelpunkt M im Winkelraum $P_j' P_0 P_{j+1}'$ liegt, und die mindestens einen Punkt von k_0^* und keinen der Punkte P_0, P_j', P_{j+1}' enthält.

Der Rand von B_j wird durch die Punkte P_0, P_j', P_{j+1}' in drei Kreisbogen geteilt. Wir setzen voraus, daß es eine Kreisscheibe k' gibt, die unserer Behauptung widerspricht. Dann muß k' einen der erwähnten Randbogen in zwei Punkten schneiden. Da der Halbmesser von k' größer ist als der Radius vnn s_j' und s_j'', kann k' keinen der Bogen $\widehat{P_0 P_j'}$ bzw. $\widehat{P_j P_{j+1}'}$ schneiden. Aus dem Schneiden mit $\widehat{P_0 P_{j+1}'}$ würde z. B. folgen, daß der durch die Gerade $P_0 P_{j+1}'$ bestimmte größere

Bogen von k' insgesamt mit dem zu $P_0P'_{j+1}$ parallelen Durchmesser von k' in s''_j enthalten ist.

Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle je nachdem der Mittelpunkt M von k' im Dreieck $P_0P'_jP'_{j+1}$ liegt oder nicht. In jedem Fall muß k' den (kleineren) Bogen $\widehat{P'_{j+1}P'_j}$ von s_j treffen.

Im ersten Fall ist das klar; im zweiten folgt dies daraus, daß diesen Bogen auch Strecke MP_0 schneidet, die ja durch k_0^* und k' überdeckt wird. Wenn aber k' den (kleineren) Bogen $\widehat{P'_{j+1}P'_j}$ in zwei Punkten schneidet bzw. berührt, so kann sie mit dem anderen Bogen $\widehat{P'_jP_{j+1}}$ keinen gemeinsamen Punkt haben.

Daraus folgt, daß jede Kreisscheibe von $\mathfrak{F}$, deren Mittelpunkt im Winkelraum $P'_jP_0P'_{j+1}$ liegt, einen der Punkte $P_0P'_jP'_{j+1}$ in ihrem Inneren enthält. Wenn das nämlich nicht der Fall wäre, so würde der betreffende Kreis die zugehörige Grenze g_i nicht erreichen bzw. binnen der konvexen Hülle von k_0^* und s_3 verlaufen.

c) *Erfaßbarkeit mit $k \geqq 7$ Punkten.*

Wir behalten wieder das zur Kreisscheibenfamilie passend eingeführte Koordinatensystem und die übrigen Bezeichnungen von § 2.

Nun bezeichnen wir mit $P''_1, P''_2, \ldots, P''_n$ die Eckpunkte irgendeines in $K_0\{(x, y): x^2+y^2 = 3\}$ eingeschriebenen regelmäßigen n-Eckes V_n $(n \geqq 6)$ und behaupten, daß die Eckpunkte und der Mittelpunkt von V_n ein inneres erfassendes System für $\mathfrak{F}$ bilden.

Bei dem Beweis wird man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem der Mittelpunkt von $k \in \mathfrak{F}$ im Kreise K_0 liegt, oder nicht.

Da der Halbmesser einer Kreisscheibe von $\mathfrak{F}$ größer als 1 ist, genügt es im ersten Fall zu beweisen, daß die Vereinigungsmenge der Kreisscheiben von Halbmesser $r=1$ um die Punkte $P_0P''_1, \ldots, P''_n$ den Kreis K_0 überdeckt. Da aber die Entfernung zweier benachbarten Eckpunkte von V_n mit wachsendem n monoton abnimmt, genügt es diese Behauptung für $n=6$ zu beweisen.

Es bezeichne nun V_6 ein in K_0 eingeschriebenes reguläres Sechseck. Eine kurze Rechnung zeigt aber, daß zwei um benachbarte Eckpunkte von V_6 mit Halbmesser 1 geschlagene Kreise einander am Kreis k_0^* schneiden, wodurch die erwähnte Überdeckung gesichert wird.

Im zweiten Fall betrachten wir die Kreisscheiben, deren Mittelpunkte außerhalb des Kreises K_0 im Winkelraum $P''_jP_0P''_{j+1}$ liegen. Jene Kreisscheibe, deren Rand die Punkte $P''_jP''_{j+1}(P''_{n+1}=P''_1)$ enthält und die Einheitsscheibe k_0^* berührt, hat den Halbmesser

$$r_n = \frac{4-2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{n}}{2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{n}-2}.$$

Da für $n \geqq 6$ sich daraus $r_n \leqq 1$ ergibt, folgt, daß die betrachteten Kreise, wenn sie P''_j und P''_{j+1} nicht enthalten, die Kreisscheibe k_0^* nicht erreichen können, weil sie sonst einen r_n nicht überschreitenden Halbmesser haben müßten.

d) *Folgerungen.*

Da die punktierte Kugel mit der Ebene homöomorph ist, erhält man die folgenden Sätze:

Satz 3. *Ist eine Kugelkappenfamilie* $\mathfrak{F}$ *an einer festen Kugel derart gegeben, daß je zwei Elemente von* $\mathfrak{F}$ *sich treffen, so ist die Stichzahl höchstens* 6.

Satz 4. *Ist* c *eine positive untere Schranke für die sphärischen Halbmesser der Elemente einer Kugelkappenfamilie* $\mathfrak{F}$, *deren Elemente sich paarweise treffen, so gibt es einen sphärischen Kreis* K_0, *in dem zu jeder natürlichen Zahl* $n \geqq 4$ *ein regelmäßiges Vieleck* V_n *so wählbar ist, daß der zum Breitenkreis* K_0 *gehörige Nordpol* N *und Südpol* S *mit den Eckpunkten von* V_n *zusammen ein inneres erfaßendes Punktsystem von* $\mathfrak{F}$ *bilden.*

(Eingegangen am 30. Dezember 1963)